204. Connexité. Exemples et applications.

Cadre : X, Y sont des espaces topologiques. $\amalg$ signifie union disjointe.

I. Définition et premières propriétés. Connexité dans $\mathbb{R}$

1) Définition. Premières propriétés topologiques

[Gou] **Prop. (1)** : Soit X un espace topologique. Sont équivalentes :

38 1) si $X = U_1 \amalg U_2$ où U_1 et U_2 sont ouverts, alors $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$

39 2) si $X = F_1 \amalg F_2$ où F_1 et F_2 sont fermés, alors

3) si $A \subset X$ est une partie ouverte et fermée, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$

39 **Déf. (2)** : Si X vérifie l'une des assertions de Prop (1), alors X est dit connexe.

Déf. (3) : Une partie A de X est dite connexe si elle l'est pour la topologie induite par celle de X.

Ex. (4) : $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$, car si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

Th. (5) : Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

Prop. (6) : X est connexe SSI toute application continue $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ est constante.

40 **Prop. (7)** : Soit $A \subset X$. Si A est connexe, alors $\bar{A}$ est connexe.
Si $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Rq (8) : On verra plus loin que (voir ANNEXE)

♡ 1) $\bar{A}$ connexe $\not\Rightarrow$ A connexe

2) A connexe $\not\Rightarrow$ $\mathring{A}$ connexe

3) A, B connexes $\not\Rightarrow$ $A \cup B$ connexe ou $A \cap B$ connexe.

~40 **Prop. (9)** : Un produit (quelconque) d'espaces connexes est connexe.

2) Connexité dans $\mathbb{R}$

Th. (10) : $[0, 1]$ est connexe. [Gou] ~ 41

Coro (11) : Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Coro (12) : (Théorème des valeurs intermédiaires)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors, $f(I)$ est un intervalle.

Ex (13) : 1) $\mathbb{R}$ est connexe
2) $\mathbb{R} \setminus \{$un point$\}$ n'est pas connexe

Exo (14) : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. ♡
Les espaces suivants sont-ils homéomorphes ?
$[a,b]$ et $\mathbb{S}_1$, $[a,b]$ et $[a,b[$, $[a,b[$ et $]a,b[$?

II. Composantes connexes [Gou]

Prop. (15) : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X telles que : $\exists i_0 \in I / \forall i \in I$, $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$. 40
Alors, $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Prop. / Déf. (16) : Soit $x \in X$. Il existe $C_x \subset X$ telle que : 41

1) $x \in C_x$
2) C_x est connexe
3) pour toute partie connexe $A \subset X$, $x \in A \Rightarrow A \subset C_x$.

De plus, C_x est fermée.
C_x est appelée composante connexe de X, et $A \subset X$ est une composante connexe s'il existe $x \in X$ tel que $A = C_x$.

Prop. (17) : Soient $x, y \in X$. Alors : "$x \mathcal{R} y \overset{déf}{\Longleftrightarrow} x \in C_y$" est une relation d'équivalence sur X.

Coro. (18) : Les composantes connexes de X forment une partition de X

Coro (19) : X est connexe SSI il n'admet qu'une seule composante connexe ♡

42 **Prop. (20)** : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert ($n \geq 1$). Alors les composantes connexes de U sont ouvertes dans U.

Coro (21) : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Alors U peut s'écrire comme une union dénombrable d'intervalles disjoints.

III. Connexité par arcs

[Gou]

42 **Déf. (22)** : X est dit connexe par arcs si pour tous $x, y \in X$, il existe $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Th. (23) : X est connexe par arcs $\Longrightarrow$ X est connexe.

Rq (24) : Réciproque fausse. Si $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}),\ x \in]0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$, alors $\bar{A}$ est connexe, mais pas connexe par arcs. (voir ANNEXE)

Coro. (25) : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-evn et $C \subset E$ est une partie convexe, alors C est connexe.

Ex. (26) : Les boules d'un evn sont connexes.

42 **Th. (27)** : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe. Alors, U est connexe par arcs.

IV. Applications, Exemples

1) Analyse

Th. (28) : (Brouwer) (voir ANNEXE)
Soit $n \geq 1$ et $B = \bar{B}(0,1)$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
DVP1 Soit $f : B \to B$ une application continue.
Alors, f admet (au moins) un point fixe.

Th. (29) : (inégalité des accroissements finis)
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$) et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que : $\forall x \in]a,b[,\ \|df(x)\| \leq g'(x)$.
Alors : $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Coro. (30) : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable sur U. Si $df \equiv 0$, alors f est constante.

Rq (31) : L'hypothèse de connexité est indispensable ! (voir ANNEXE)

Th. (32) : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : U \to \mathbb{R}^p$ une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :
1) il existe $x_0 \in U$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge
2) $(df_n)_n$ converge localement uniformément sur U vers $\Phi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$
Alors, $(f_n)_n$ converge localement uniformément vers une application $f : U \to \mathbb{R}^p$. De plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $df(x) = \Phi(x)$ pour tout $x \in U$.

Appli. (33) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$

Th. (34) : (Cauchy-Lipschitz global)
Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
Alors pour tout $(t_0, x_0) \in J \times U$, il existe une unique solution maximale de $x' = f(t, x)$ de conditions initiales (t_0, x_0).

2) Analyse complexe

[Ru] **Th. 35 :** Soit γ un chemin fermé $\mathcal{C}^1_{pm}$ d'image γ^* dans $\mathbb{C}$ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. On définit pour $z \in \Omega$: $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$.

247 Alors Ind_γ est à valeurs entières sur Ω, constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.

Ex. 36 : voir ANNEXE

Th. 36 : Si $a \in \mathbb{C}, r > 0$ et $\gamma^* = \mathcal{C}(a,r)$. Alors

248 $$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-a| < r \\ 0 & \text{si } |z-a| > r \end{cases}$$

Th. 37 : *(principe du prolongement analytique)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $E \subset \Omega$ une partie admettant un point d'accumulation dans Ω. Soient f, g deux fonctions analytiques sur Ω telles que $f_{|E} = g_{|E}$. Alors, $f = g$ sur Ω tout entier.

Exo 38 : Existe-t-il $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ telle que $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Appli. 39 : Soit $P = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\, z > 0\}$ et $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \forall z \in P$.
Alors $\Gamma \in \mathcal{H}(P)$, et Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en tout $-n$, $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-, \quad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

3) Algèbre linéaire

Th. 40 : Soit $n \geq 1$.
Alors : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective — DVP 2

Th. 41 : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
1) $SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvections
2) si $M \in GL_n(K)$, alors M peut s'écrire comme un produit de matrices de transvections et d'au plus une matrice de dilatation

Coro. 42 : $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes

Prop. 43 : $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes,
$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det M < 0\}$

Rq 44 : On utilise dans les propositions précédentes le fait que $GL_n(K)$ est un groupe topologique, i.e. un groupe muni d'une topologie pour laquelle la multiplication et l'inversion sont continues

Rq 45 : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach de dimension infinie, $GL_c(E)$ reste un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$ ainsi qu'un groupe topologique.

ANNEXE

Rq 8 :

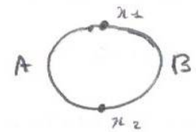
1) 

$A = B(-1,1) \cup B(1,1)$

$\bar{A}$ est connexe par arcs

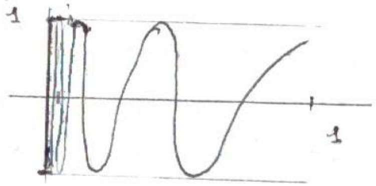
2) même exemple

3). $A =]-\infty, 0[$, $B =]0,+\infty[$ sont connexes mais pas $A \cup B$

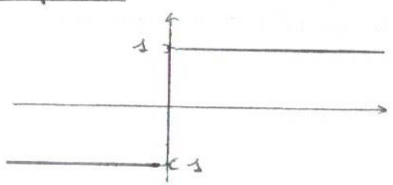


$A \cap B = \{x_1\} \cup \{x_2\}$

Rq 24 :

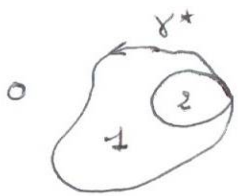


Rq. 31 :



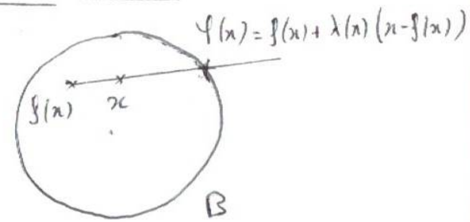
fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}^*$.

Ex. 36 :



0, 1, 2 : valeurs de l'indice

Th. 27 : (Brouwer)



Références :

· [Gou] Gourdon, Analyse (3e éd.)

.....